

"به نام خدا"

تمرینات سری پنجم درس ریاضی عمومی ۲

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (تهران پلی تکنیک)

بهار ۹۵

احتراماً به استحضار تدریس یاران محترم می‌رساند، سوالات مربوط به فصل انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه به شرح ذیل است، لذا عزیزان موظف‌اند تمامی سوالات را در کلاس حل کرده و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازند.

تهیه و تنظیم:

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

امین یاراحمدی

سوال ۱: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^3 dy dx$$

(پاسخ : 0)

سوال ۲: انتگرال $\iint \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ را روی ناحیه محصور در یک طوق از پروانه زیر حساب کنید:

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0, x \geq 0$$

(پاسخ : $\frac{\pi-2}{4}$)

سوال ۳: مساحت خارج از دایره به معادله $\rho = 2 \cos \theta$ و داخل منحنی دلگون به معادله $\rho = a(1 + \cos \theta)$ را با استفاده از انتگرال دوگانه حساب کنید.

(پاسخ : $\frac{\pi a^2}{2}$)

سوال ۴: مطلوبست محاسبه حجم محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ و داخل استوانه $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

(پاسخ : $\frac{16a^3}{9}(3\pi - 4)$)

سوال ۵: حجم زیر سهمی گون $x^2 + y^2 = 4az$ و داخل استوانه $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ و صفحه xoy را حساب کنید.

(پاسخ : $\frac{3\pi a^3}{8}$)

سوال ۶: مطلوبست حجم محصور به دو رویه $z = x^2 + 9y^2$ و $z = 18 - x^2 - 9y^2$

(پاسخ : 27π)

سوال ۷: هرگاه D ناحیه محصور بین خطوط $y = x, y = x - 2, x + 2y = 0, x + 2y = 1$ باشد،

آنگاه $\iint \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dy dx$ را روی این ناحیه حساب کنید.

(پاسخ: $\frac{1}{6}(\ln|\sec 2 + \tan 2|)$)

سوال ۸: انتگرال $\iint e^{-(x^2+xy+y^2)} dy dx$ را روی ناحیه D که ناحیه محصور به منحنی $x^2 + xy + y^2 = 3$ می‌باشد را حساب کنید. (راهنمایی: فرض کنید $x = u + v, y = u - v$).

(پاسخ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}(1 - e^{-3})$)

سوال ۹: مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه زیر:

$$\int_0^1 \int_{\text{Arc tan} x}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos y) dy dx$$

(پاسخ: $\frac{-1}{8}(\ln 2)^2$)

سوال ۱۰: انتگرال‌های زیر را بر ناحیه‌های ذکر شده بیابید:

الف) $\iint (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy$ $D = \{x^2 - y^2 - xy = 1, x^2 - y^2 = 3, xy = 1\}$

ب) $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{y+x}} dy dx$

ج) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3} dy dx$

د) $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ $D = \{x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0\}$

ه) $\iint \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$ $D = \{2 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

و) $\iint \frac{(x-y)^2(1+2y)}{1+x+y^2} dx dy$ $D = \{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq x + 2\}$

ز) $\iiint x dv$ $E = \{z + x^2 + y^2 = 2, x = y^2, y = x^2\}$

سوال ۱۱: مساحت ناحیه‌ای که بین $r = 2 \cos \theta$ و $r^2 = 16 \cos 2\theta$ قرار دارد را بدست آورید.

سوال ۱۲: مساحت ناحیه‌ای که در رابطه زیر صدق می‌کند را بیابید:

$$(x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$$

سوال ۱۳: مطلوبست حجم ناحیه محصور بین رویه‌های زیر:

$$z = x^2 + y^2, \quad x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1)$$

(پاسخ: $\frac{\pi}{4}$)

سوال ۱۴: حجم آن قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ که داخل سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ می‌باشد را حساب کنید.

(پاسخ: $\frac{37\pi}{6}$)

سوال ۱۵: انتگرال سه‌گانه $I = \iiint \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ را در داخل کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 2Ry = 0$ بررسی کنید.

(پاسخ: $\frac{4\pi}{3}R^2$)

سوال ۱۶: مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$ روی ناحیه زیر:

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

(پاسخ: $\frac{1}{48}$)

سوال ۱۷: انتگرال زیر را ابتدا به مختصات قائم و سپس به مختصات کروی تبدیل کنید.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

سوال ۱۸: مساحت سطح آن قسمتی از کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را که داخل استوانه $x^2 + y^2 = ax$ واقع است، حساب کنید.

(پاسخ: $2a^2(\pi - 2)$)

سوال ۱۹: ماهانه دوم ۹۲-۹۳: فرض کنید R ناحیه واقع بین خطوط $y - x + y = 2, x + y = 0$ باشد. مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه زیر:

$$\iint (x - y)e^{x^2 - y^2} dx dy$$

سوال ۲۰: ماهانه دوم ۹۲-۹۳: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy$$

سوال ۲۱: ماهانه دوم ۹۲-۹۳: فرض کنید W حجم درون مخروط $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ و رویه $\rho = 1 - \cos \varphi$ و خارج کره $\rho = \frac{3}{2}$ باشد، مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

سوال ۲۲: ماهانه دوم ۹۲-۹۳: اگر D ناحیه خارج کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و زیر مخروط $z = (\sqrt{3} + 1) - \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای صفحه $z = 0$ باشد، کران‌های انتگرال زیر را در مختصات کروی بیان کنید. (محاسبه انتگرال لازم نیست).

$$\iiint dV$$

سوال ۲۳: پایان ترم ۹۲-۹۳: فرض کنید R ناحیه محدود به چهارضلعی با رئوس $(0,0), (1,2), (2,1), (3,3)$ باشد، انتگرال زیر را محاسبه کنید. (راهنمایی: از تغییر متغیر استفاده کنید)

$$\iint \sqrt{\frac{2x - y}{1 - x + 2y}} dA$$

سوال ۲۴: پایان ترم ۹۳-۹۴: کران‌های انتگرال $\iiint dV$ را که محدود به $\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}$ و

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ است، در سه دستگاه مختصات کروی، استوانه‌ای و دکارتی فقط بنویسید. (محاسبه لازم نیست)