



۱. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۶) نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yxy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در $(0, 0)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقطه هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ هر دو وجود دارند. پس وجود مشتقات جزئی تابعی چند متغیره، مستلزم پیوستگی آن نیست. این امر با حالت تک متغیره تفاوت دارد.

۲. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۷) اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوبست تعیین $f_1(0, 0)$ و $f_2(0, 0)$ در صورت وجود.

۳. نشان دهید که تابع با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$ در $(0, 0)$ پیوسته است و مشتقات جزئی در این نقطه وجود دارند اما تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. درباره $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ چه می توان گفت؟

۴. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۲۱) معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ را در نقطه $(1, -1)$ بیابید.

۵. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۲۳) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست.

۶. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۲۶، ۲۹) نشان دهید هر یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده صدق می کند.

$$z = \frac{x+y}{x-y}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}; \quad x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = -2w.$$

۷. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۰) اگر $z = f(x^2 + y^2)$ که در آن f یک تابع یک متغیره مشتق پذیر دلخواه است، نشان دهید در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده زیر صدق می کند.

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۸. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۳۴) فاصله نقطه $(1, 1, 0)$ از سهمیوار دایره ای به معادله $z = x^2 + y^2$ را بیابید.



۹. (آدامز بخش ۳ - ۱۲ سوال ۴۰) فرض کنیم

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

آیا f_1, f_2, f_3 در $(0, 0, 0)$ پیوسته هستند؟

۱۰. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۱۵)

الف) اگر $y = 3s - 2t, x = 2s + 3t, z = f(x, y)$ مطلوبست است محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$.

ب) اگر $y = t \cos s, x = t \sin s$ مطلوبست است محاسبه $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y)$.

۱۱. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۲۳) اگر $x = e^s \cos t, y = e^s \sin t$ و $z = u(x, y) = v(s, t)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

۱۲. (آدامز بخش ۵ - ۱۲ سوال ۲۵) اگر $u(x, y) = r^2 \ln r$ و $r^2 = x^2 + y^2$ ، نشان دهید

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

۱۳. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۱۹) اگر برای تابع دیفرانسیل پذیر $f(x, y)$ داشته باشیم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{2}} f(a, b) = 3\sqrt{2},$$

$$D_{(3i-4j)/5} f(a, b) = 5,$$

مطلوبست محاسبه $\nabla f(a, b)$.

۱۴. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۲۶) بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه $x^2 + y^2 = 2$ و $y^2 + z^2 = 2$ را در نقطه

$(1, -1, 1)$ بیابید.

۱۵. (آدامز بخش ۷ - ۱۲ سوال ۳۶) فرض کنیم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) $\nabla f(0, 0)$ محاسبه

ب) با استفاده از تعریف مشتق سویی، $D_u f(0, 0)$ را که در آن $u = (i + j)/\sqrt{2}$ را محاسبه کنید.

ج) آیا $f(x, y)$ در $(0, 0)$ دیفرانسیل پذیر است؟



۱۶. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \sqrt{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

(آ) نشان دهید برای هر بردار یکه $u = (u_1, u_2)$ در صفحه، $D_u f(0, 0)$ وجود دارد.

(ب) آیا تابع f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است؟

۱۷. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۰) در هر یک از حالت های زیر، با توجه به معادلات مفروض، مشتق خواسته شده را محاسبه کنید. کدام شرط بر متغیرها وجود جوابی را تضمین می کند که دارای مشتق مشخص شده است؟

(الف) $x + 2y + 3z + 4w = 2, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ ، $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$.

(ب) $x + y + u + v = 0, xyuv = 1$ ، $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$.

۱۸. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۷) نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^2z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ نسبت به مجهولات x, y, z به عنوان توابعی از u, v حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_v$ را به ازای $(u, v) = (1, 1)$ بیابید.

۱۹. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۱۸) نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2y - yz^2 = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$ نسبت به مجهولات x, y, z به عنوان توابعی از u, v حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x, y}$ را به ازای $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ بیابید.

۲۰. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۲۲) اگر رابطه $F(x, y, z) = 0$ متغیر z را به عنوان تابعی از x, y به دست دهد، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ بر حسب مشتق های جزئی F .

۲۱. (آدامز بخش ۸ - ۱۲ سوال ۲۵) اگر $F(x, y, z) = 0$ ، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

فرمول های مشابهی برای $F(x, y, z, u) = 0$ و $F(x, y, z, u, v) = 0$ بدست آورید. حالت کلی چیست؟



۲۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u^x v^x + (u+x)^x + y + 3w - 4 = 0, \\ \sin(uv) + e^{v+y^{x-1}} + v - 1 = 0, \\ x^2 - 4y^2 + 4w = v - u, \end{cases}$$

(آ) نشان دهید در یک همسایگی نقطه $p_0 = (u, v, w, x, y) = (0, 0, 1, 0, 1)$ می توان این دستگاه را نسبت به مجهولات

u, v و w به عنوان تابعی از x و y حل کرد.

(ب) مقادیر $\frac{\partial w}{\partial y}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ را در نقطه $(x, y) = (0, 1)$ بیابید.

(ج) اگر $f(x, y) = e^{uv}$ باشد مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(x, y) = (0, 1)$ بیابید.

۲۳. (آدامز بخش ۱-۱۳ سوالات ۹، ۱۸) نقاط بحرانی توابع مفروض زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

(a) $f(x, y) = x^y e^{-(x^2+y^2)}$

(b) $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$

۲۴. (آدامز بخش ۲-۱۳ سوالات ۳، ۶)

(الف) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x, y) = xy - y^2$ را بر قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ بیابید.

(ب) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x, y) = xy(1-x-y)$ را بر مثلثی که راس هایش عبارت اند از $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ بیابید.

۲۵. (آدامز بخش ۲-۱۳ سوال ۱۱) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ را بر گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ بیابید.

۲۶. (آدامز بخش ۳-۱۳ سوال ۱۲) کوتاهترین فاصله مبدا از خم حاصل از فصل مشترک رویه های $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و $x - 2z = 3$ را بیابید.

۲۷. (آدامز بخش ۳-۱۳ سوال ۱۴) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x, y, z) = x + y^2 z$ را مقید به قیدهای $z = x$ و $y^2 + z^2 = 2$ بیابید.

۲۸. مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بوسیله صفحه $z = x + y + 1$ در طول منحنی C قطع شده است. بر C نزدیکترین نقطه به مبدا را تعیین کنید.

۲۹. هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\pi}$ محورهای مختصات را در نقاط A, B, C قطع میکند. ثابت کنید

$$\|\vec{oA}\| + \|\vec{oB}\| + \|\vec{oC}\| = \text{ثابت}$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

تمرینات ریاضی عمومی ۲ - سری سوم

نیمسال دوم ۹۹-۰۰
تهیه و تنظیم: مهتری رشیدی

۳۰. اگر $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی مشتق پذیر و $f(x, y) = h(g(x, y))$ باشد، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$