



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

نیمسال اول ۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

تمرینات ریاضی عمومی - سری دوم دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر در $x = a$ باشد. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h}$$

۲. فرض کنید \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا باشد و $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ثابت کنید f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

۳. الف) فرض کنید $f(x) = x \sin^2 \pi x$, $x \in \mathbb{R}$. تابع مشتق f را پیدا کنید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه ای به طول $x = 1$ بنویسید.

۴. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر در $x = c$ باشد. اگر $a, b, d \in \mathbb{R}$ ، ثابت کنید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+ah) - f(c+bh)}{\sin(dh + h^3)} = \frac{a-b}{d} f'(c). \quad (d \neq 0)$$

۵. (آدامز) فرض کنید f بر بازه ای مانند I دو بار مشتق پذیر باشد (یعنی f'' بر I وجود داشته باشد)،

نقاط 0 و 2 متعلق به I باشند و $f(0) = f(1) = 0$ و $f(2) = 1$ ثابت کنید که:

آ) به ازای نقطه ای مانند a متعلق به I داریم $f'(a) = \frac{1}{4}$.

ب) به ازای نقطه ای مانند b متعلق به I داریم $f''(a) > \frac{1}{4}$.

پ) به ازای نقطه ای مانند c متعلق به I داریم $f'(c) = \frac{1}{4}$.

۶. ثابت کنید توابع $f(x) = x^2 - \cos x$ و $g(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ هر کدام دارای دقیقاً دو ریشه ی حقیقی می باشند.

۷. نشان دهید که معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$ برای $n \in \mathbb{N}$ و $a > 0$ فقط یک جواب دارد.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

نیمسال اول ۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

تمرینات ریاضی عمومی - سری دوم دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۸. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

۹. نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$|\sin a - \sin b| \leq |b - a|, \quad \forall a, b \in R. \quad (\text{آ})$$

$$(1+x)^p \leq 1+x^p, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad x > 0. \quad (\text{ب})$$

$$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{ج})$$

۱۰. (آدامز الف) تقریب خطی را برای تابع $f(x) = \sqrt[4]{x}$ حول نقطه $x_0 = 81$ نوشته و مقدار تقریبی $\sqrt[4]{85}$ را بدست آورید.

ب) مقدار تقریبی $\sqrt[4]{65}$ را محاسبه کنید.

۱۱. (آدامز نسبت های وابسته) هوا را با تلبه وارد یک بادکنک کروی می کنیم. هنگامی که شعاع بادکنک ۳۰ سانتیمتر است، حجم آن با آهنگ $20 \frac{cm^3}{s}$ افزایش می یابد. آهنگ افزایش شعاع در این لحظه چقدر است؟

۱۲. (آدامز نسبت های وابسته) سطح مقطع جانبی حوض آبی به شکل مثلث متساوی الاضلاع است که ضلع بالایی آن افقی است. اگر حوض دارای ۱۰ متر طول و ۳۰ سانتیمتر عمق باشد و نیز اگر آب با آهنگ $\frac{1}{4} \frac{m^3}{min}$ در آن جاری شود، زمانی که آب ۲۰ سانتیمتر عمق داشته باشد سطح آب با چه سرعتی بالا می آید؟

۱۳. کمترین مساحت مثلث متساوی الساقینی را پیدا کنید که محیط بر دایره ای به شعاع r است.

۱۴. مخروطی با ارتفاع h درون یک مخروط بزرگتر به ارتفاع H طوری محاط شده است که راس مخروط کوچکتر در مرکز قاعده مخروط بزرگتر قرار گرفته است. نشان دهید که اگر $h = \frac{1}{3}H$ مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را اختیار میکند.

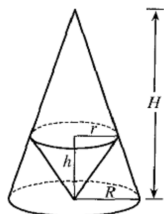


دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

تمرینات ریاضی عمومی - سری دوم دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نیمسال اول ۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی



۱۵. قطاعی از یک قرص دایره‌ای شکل به شعاع R را جدا و سپس قسمت باقیمانده‌ی قرص را طوری تا می‌کنیم که از انطباق دو لبه‌ی آن بر هم یک مخروط پدید آید. بیشترین حجم ممکن برای مخروط چقدر است؟

