



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{1 - 2 \cos x} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{ه})$$

۲. فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوسته باشد.

الف) نشان دهید اگر  $f(a) > 0$  تابع  $f$  در یک همسایگی  $x = a$  مثبت است.

ب) نشان دهید اگر  $f(a) < 0$  تابع  $f$  در یک همسایگی  $x = a$  منفی است.

۳. نقاط ناپیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  را بررسی کنید.

۴. فرض کنید  $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ . آیا نقطه  $x_0 \in (-2, 2)$  وجود دارد بطوریکه  $f(x_0) = \frac{7}{4}$ ؟

۵. فرض کنید  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای همه  $x \in (0, 1)$  داریم  $f^2(x) = 1$ . ثابت کنید  $f = 1$  یا  $f = -1$ .

۶. فرض کنید  $a \in \mathbb{R}$ . با بیان قضایا به طور دقیق ثابت کنید عدد حقیقی مانند  $x_0$  هست بطوریکه  $x_0^3 + ax_0 + \sin x_0 = 1$ .

۷. فرض کنید  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  توابعی پیوسته باشند و به ازای هر  $q \in \mathbb{Q}$  داشته باشید  $f(q) = g(q)$ . نشان دهید به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f(x) = g(x)$ .



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۸. تابع  $f$  در فاصله  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  پیوسته است و به ازای هر  $x$  در این فاصله داریم  $0 \leq f(x) \leq 1$  ثابت کنید حداقل يك  $x_0 \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  وجود دارد که  $f(x_0) = \sin x_0$ .

۹. فرض کنید که  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  پیوسته باشد. ثابت کنید عددی مانند  $c$  در بازه  $[0, 1]$  وجود دارد که  $f(c) = c$ .

۱۰. فرض کنید تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  در رابطه  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  صدق کند. نشان دهید:

(الف)  $f(nx) = nf(x)$  برای هر  $x \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{N}$ .

(ب)  $f$  در یک نقطه پیوسته است اگر و تنها اگر در  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد.

(ج)  $f$  پیوسته است اگر و تنها اگر برای عددی مانند  $m \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) = mx$ .

۱۱. فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و  $a \in \mathbb{R}$  وجود داشته باشد بطوریکه  $f(f(a)) = a$ . ثابت کنید  $c \in \mathbb{R}$  وجود دارد بطوریکه  $f(c) = c$ .

۱۲. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  و  $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0$ ، نشان دهید وجود دارد  $y \in \mathbb{R}$ ، به طوری که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) \geq f(y)$ .

۱۳. فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته روی بازه  $[a, b]$  باشد و  $f(a) = f(b)$ . اگر  $n \in \mathbb{N}$  باشد، نشان دهید عددی مانند  $c \in [a, b - \frac{b-a}{n}]$  وجود دارد که  $f(c) = f(c + \frac{b-a}{n})$ .

۱۴. فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و  $f(0) = f(1)$ . نشان دهید  $a, b \in [0, 1]$  وجود دارند بطوریکه  $b - a = \frac{1}{n}$  و  $f(a) = f(b)$ .