



تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. (آدامز) برای تابع مفروض  $f(x) = x^3$  بر بازه مفروض  $[0, 1]$  مقادیر  $L(f, P_n), U(f, P_n)$  که در آن  $P_n$  افزایی است که بازه را به  $n$  زیر بازه، هر یک به طول  $\Delta x = \frac{1}{n}$  تقسیم می کند محاسبه کنید. نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$$

بنابراین  $f$  بر بازه  $[0, 1]$  انتگرال پذیر است. مقدار  $\int_0^1 x^3 dx$  چقدر است؟

۲. (آدامز) می دانیم برای تابع انتگرال پذیر  $f(x)$  بر بازه  $[a, b]$ ، عددی مانند  $c \in [a, b]$  وجود دارد بطوریکه  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  را مقدار متوسط تابع بر بازه  $[a, b]$  می نامیم. مقدار متوسط توابع زیر را بر بازه داده شده محاسبه کنید.

الف)  $f(t) = 1 + \sin t$  بر بازه  $[-\pi, \pi]$ .

ب)  $f(x) = |x + 1| \operatorname{sgn} x$  بر بازه  $[-2, 2]$  که در آن  $\operatorname{sgn} x$  تابع علامت است و بصورت زیر تعریف می شود.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۳. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt \right)$$

۴. اگر تابع  $f(x)$  تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر  $x$  داشته باشیم

$$\int_0^x f(t) dt = x \sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^4} dt$$

ضابطه  $f$  را بیابید.

۵. (آدامز) فرض می کنیم  $a < b$  و  $f$  تابعی پیوسته بر  $[a, b]$  باشد. ثابت  $k$  را طوری بیابید که انتگرال

$$\int_a^b (f(x) - k)^2 dx$$



مینیمم شود.

۶. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  و نشان دهید  $c \in [0, 1]$  وجود دارد بطوریکه  $f(c) = 3c^2$ .

۷. فرض کنید  $0 < a < b$  و  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد بطوریکه  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . نشان دهید  $c \in (a, b)$  وجود دارد بطوریکه  $\int_a^c f(x) dx = c f(c)$ .

۸. ثابت کنید اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابع روی بازه  $[a, b]$  باشند به نحوی که  $g(x)$  تابع پیوسته و  $f \geq 0$  تابعی پیوسته و انتگرال پذیر باشد، در اینصورت نقطه ای مانند  $x_0 \in (a, b)$  وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(x_0) \int_a^b f(x) dx.$$

۹. (آدامز) با استفاده از انتگرال معین، تابعی مانند  $F(x)$  تعریف کنید که به ازای هر  $x$ ،  $F'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  و در رابطه  $F(17) = 0$  صدق کند.

۱۰. (آدامز الف) مینیمم و ماکسیمم تابع  $F(x) = \int_0^{\sqrt{x-x^2}} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$  را بیابید.  
ب) اگر  $f(x) = \int_0^x (1-t^2) \cos^2 t dt$  روی کدام بازه  $f(x)$  صعودی است.