



توجه:

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. اگر بردارهای $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ بگونه ای باشند که $\neq 0$ $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

نشان دهید:

$$\mathbb{R}^3 = \{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

۲. معادله صفحه گذرنده از نقاط $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 3)$ و عمود بر صفحه $x + 2y - 3z = 0$ را بیابید.

۳. معادله صفحه گذرنده از نقطه $(1, 1, 1)$ و عمود بر صفحه $2x - y + 4z = 1$ و موازی خط $\frac{x-1}{4} = y + 1 = \frac{z-1}{4}$ را بیابید.

۴. ذره ای روی فصل مشترک استوانه های $y = -x^2$, $z = x^2$ در جهتی که x افزایش می یابد در حرکت است. تندی این ذره در لحظه ای که در نقطه $(1, -1, 1)$ است، برابر است با $9 \frac{cm}{s}$ و این تندی با آهنگ $3 \frac{cm}{s^2}$ افزایش می یابد. سرعت و شتاب ذره را در لحظه یاد شده بیابید. (آدامز تمرینات ۱.۱۱)

۵. سرعت، تندی و شتاب ذره ای را بیابید که مکانش در لحظه t عبارتست از $r(t)$. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید. (آدامز تمرینات ۱.۱۱)

الف) $r = e^{-t} \cos(e^t) i + e^{-t} \sin(e^t) j - e^t k$

ب) $r = a \cos t \sin t i + a \sin^2 t j + a \cos t k$

۶. خم های زیر را پارامتری کنید. (آدامز تمرینات ۳.۱۱)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases} \quad (\text{آ})$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x - 4y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

(ج) تقاطع دو رویه $z = x^2 y^2$ و $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

۷. خم فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و استوانه بیضوی $x^2 + 2z^2 = 1$ را توصیف کنید. طول خم مشترک را بیابید. (آدامز تمرینات ۳.۱۱)



۸. خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید. (آدامز تمرینات ۴.۱۱)

$$r = a \cos^2 t i + a \sin^2 t j + b \cos 2t k, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}) \quad (\text{آ})$$

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \sin\left(\frac{ks^2}{4}\right) ds, \int_0^t \cos\left(\frac{ks^2}{4}\right) ds \right) \quad (\text{ب})$$

$$\gamma(t) = \left(t, \int_0^t \sin\left(\frac{ks^2}{4}\right) ds, \int_0^t \cos\left(\frac{ks^2}{4}\right) ds \right) \quad (\text{ج})$$

۹. خمیدگی و تاب خم پارامتری زیر را در نقطه دلخواه t بیابید: (آدامز تمرینات ۵.۱۱)

$$x = 2 + \sqrt{2} \cos t \quad y = 1 - \sin t \quad z = 3 + \sin t$$

۱۰. خم $\gamma(t) = (4 \cos(3t), 4 \sin(3t), 3 \cos(2t))$ مفروض است. مطلوبست محاسبه $T(\circ), N(\circ), B(\circ), \kappa(\circ), \tau(\circ)$.

۱۱. الف) منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $4x^2 + 9y^2 = 9, 1 - z = x^2 + y^2$ را بر حسب t پارامتری کنید.

ب) برای خم پارامتری حاصل از قسمت الف، مقادیر N, τ, κ, B را در لحظه $t = 0$ محاسبه کنید.
(میانترم امیرکبیر ۹۷-۹۸)

$$۱۲. \text{ الف) نشان دهید } \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \frac{du}{dt} \times \frac{d^3 u}{dt^3}$$

ب) محاسبه و ساده کنید: $\frac{d}{dt} \left(u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \right)$

۱۳. فرض کنید خم γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است و سه بار مشتق پذیر باشد. در این صورت مقدار

$$\left| \gamma'''(s) \times \frac{dN}{ds} \right|$$

را محاسبه کنید.

۱۴. کنج فرنه و مقادیر تاب و انحنا را برای منحنی

$$\gamma(t) = (\cos(t) \sin(t), \sin^2(t), \cos(t)),$$

در لحظه $t = 0$ بدست آورید.

۱۵. منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \sqrt{3}y + z = 1, \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

طول قوس، کنج فرنه، انحنا، و تاب خم را بدست آورید.



۱۶. برای منحنی

$$\gamma(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3} \right),$$

نشان دهید

$$\kappa = \tau = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

۱۷. ثابت کنید یک منحنی در صفحه با معادله پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ دارای انحنای زیر است:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

۱۸. خم C با معادله پارامتری $r(t) = (t, 1+t, \sqrt{1-2t^2})$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید انحنای این خم در همه نقاط مقداری ثابت است.

ب) ثابت کنید این خم مسطح است و معادله صفحه شامل این خم را بنویسید. (امیرکبیر ۹۰)

۱۹. نشان دهید خم منحنی $r = f(\theta)$ از رابطه زیر بدست می آید. (آدامز تمرینات ۵.۱۱)

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{[(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$