



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

نیمسال اول ۹۹  
تهیه و تنظیم: مهري رشیدی

تمرینات ریاضی عمومی - سری چهارم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. (آدامز)

الف) با استفاده از تعویض متغیر  $x = \pi - u$  نشان دهید که به ازای هر تابع پیوسته  $f$  بر بازه  $[0, \pi]$  داریم

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

ب) انتگرال  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  را محاسبه کنید.

۲. مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر:

$$(a) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$(b) \quad I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx$$

۳. الف) اگر تابع  $f(x)$  بر بازه  $[a, b]$  دوبار مشتق پذیر باشد و  $f(a) = f(b) = 0$ . نشان دهید که

$$\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx = -2 \int_a^b f(x) dx.$$

ب) اگر  $f'(x)$  روی بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد، نشان دهید

$$2 \int_a^b f'(x) f(x) dx = [f^2(b) - f^2(a)].$$

۴. الف) معادله انتگرالی  $2f(x) + 1 = 3 \int_x^1 f(t) dt$  را حل کنید.

ب) اگر تابع  $f(x)$  تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر  $x$  داشته باشیم  $\int_0^x f(t) dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t) dt$  ضابطه  $f$  را بیابید.

۵. (میانترم امیرکبیر ۹۷) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^{\ln x} \cosh^2(t) dt}{1 - e^{x-1}}$$

۶. (آدامز) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int e^{2x} \sin^3 x dx, \quad 2. \int \sin^4 t \cos^5 t dt, \quad 3. \int \frac{x}{(4x^2 + 1)^5} dx, \quad 4. \int_0^1 \sqrt{x} \sin(\pi\sqrt{x}) dx$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

تمرینات ریاضی عمومی - سری چهارم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نیمسال اول ۹۹  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

$$۵. \int \frac{dx}{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$۶. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta},$$

$$۷. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + x - 2},$$

$$۸. \int \frac{t dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$$

$$۹. \int \frac{4xe^{x^2}}{e^{2x^2} + 2e^{x^2} + 2} dx$$

$$۱۰. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\arcsin(\ln x)}{x} dx$$

$$۱۱. \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$۱۲. \int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1 + \tanh^2 x} dx$$

۷. معادله  $\frac{1}{3} \sinh(x) + \frac{1}{8} \cosh(x) = -\frac{1}{8}$  را حل کنید.

۸. نشان دهید  $\sin^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\sinh x)$

۹. (آدامز) یک فرمول بازگشتی برای  $I_n = \int \sec^n x dx$  بیابید و با استفاده از آن  $I_6$  را محاسبه کنید.

۱۰. (آدامز) نشان دهید  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{n-2} x dx$  که  $n \geq 2$  و با استفاده از آن  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$  و  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x dx$  را محاسبه کنید.

۱۱. (آدامز) اگر  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نشان دهید که به ازای  $0 < x < e$  داریم  $f'(x) > 0$  و به ازای  $x > e$  داریم  $f'(x) < 0$ . بنابراین  $f(x)$  در  $x = e$  به ماکسیمم خود می رسد. با استفاده از این نتیجه نشان دهید  $e^\pi > \pi^e$ .

۱۲. (آدامز) نشان دهید که تابع  $f(x) = x^x$  بر بازه  $[e^{-1}, \infty)$  اکیدا صعودی است.

(ب) اگر  $g$  تابع وارون  $f$  در قسمت قبل باشد، نشان دهید که

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y) \ln(\ln y)}{\ln y} = 1.$$