



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی - سری ششم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. الف) (آدامز) فرض کنید $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) نشان دهید که دنباله a_n صعودی و کراندار است. به این ترتیب نتیجه بگیرید که این دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

۲. (آدامز) فرض کنید $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ و لذا $\ln a_n = n \ln(1 + \frac{1}{n})$. با استفاده از این ویژگی تابع لگاریتمی نشان دهید:

الف) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است.
ب) e یک کران بالا برای $\{a_n\}$ است.

۳. (آدامز) همگرایی و واگرایی هر یک از سری های زیر را بررسی کنید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5+n^5}}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$

۵. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$, ($p \geq 0$)

۳. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \sqrt{\ln(\ln(n))}}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \varepsilon^n}{(3n)!}$

۴. الف) فرض کنید سری های $\sum a_n^2$ و $\sum b_n^2$ همگرا باشند. نشان دهید سری $\sum a_n b_n$ نیز همگراست.
ب) فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد. نشان دهید سری های $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ و $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ و $\sum a_n^2$ همگرا هستند.

ج) فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو سری مثبت و همگرا باشند. نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$ نیز همگراست.

۵. (آدامز) مجموع سری های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(\pi-1)^{2n}}$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$

۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\pi^n}$

۶. الف) اگر بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+4)^n$ برابر با $[-9, 1)$ باشد و بدانیم حد $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ وجود دارد، مقدار این حد را بیابید و سپس بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n(x-3)^n$ را بیابید.

ب) شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n$ را بیابید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهتری رشیدی

تمرینات ریاضی عمومی - سری ششم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۷. الف) (آدامز) همگرایی مطلق، مشروط یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$۱. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n - n}$$

$$۲. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos n\pi}{1 + n^3}$$

ب) در هر یک از سری های زیر به ازای کدام مقادیر x سری مطلقا همگرا، به طور مشروط همگرا یا واگراست؟

$$۱. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - 2x)^n}{n}$$

$$۲. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

۸. (آدامز) بدون استفاده از قاعده هوییتال حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3 \int_0^x \sin t^2 dt}{x^7}$$

$$۲. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan^{-1} x)(e^{2x} - 1)}{2x^2 - 1 + \cos 2x}$$

۹. الف) سری مک لورن تابع $f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ را بیابید و بعلاوه $f^{(99)}(0)$ را بیابید.

ب) اگر $f(x) = \sin x^3$ ، مطلوبست محاسبه $f^{(15)}(0)$.

ج) با استفاده از سری مک لورن تابع $\tan^{-1}(x)$ نشان دهید $\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.